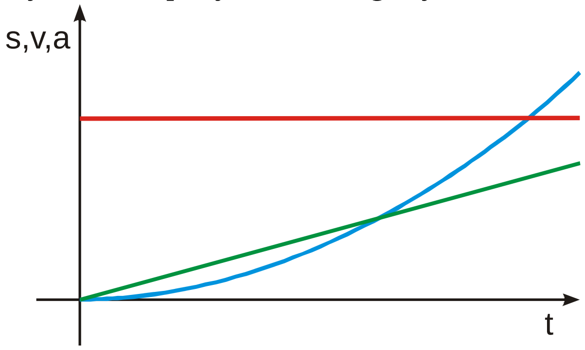
1.1.22 Rovnoměrně zrychlený pohyb v grafech

Předpoklady: 010119

Př. 1: Na obrázku jsou nakresleny grafy dráhy, rychlosti a zrychlení rovnoměrně zrychleného pohybu. Přiřaď grafy veličinám.

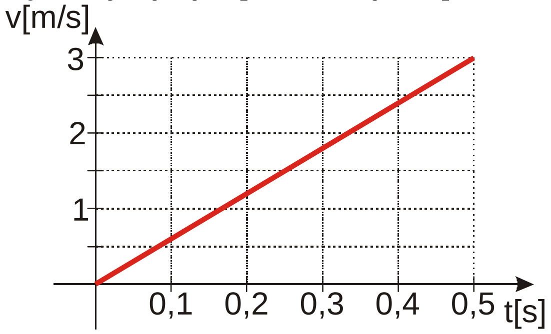


Rovnoměrně zrychlený pohyb:

- Zrychlení je stále stejné, nemění se v čase $\Rightarrow$ grafem musí být vodorovná čára $\Rightarrow$ graf zrychlení je červený.
- Rychlost rovnoměrně roste $\Rightarrow$ grafem rychlostí musí být přímka (šikmá) $\Rightarrow$ graf rychlosti je zelený.
- Dráha roste nerovnoměrně, přibývá čím dál rychleji $\Rightarrow$ grafem dráhy musí být křivka s rostoucí strmostí $\Rightarrow$ graf dráhy je modrý.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chybou je, že žáci vyberou grafy tak jak je znají z rovnoměrného pohybu a zrychlení přiřadí ten zbývající – parabolu. Řeším to otázkami: „Jak se mění zrychlení? Má modrá čára opravdu v každém okamžiku stejnou hodnotu? …“

Př. 2: Na obrázku je graf rychlosti padajícího nafukovacího míče. Urči jeho zrychlení. Z jaké výšky byl upuštěn, když dopadl na zem za 0,5 s?



$t_d = 0,7\,\text{s}$ hodnoty vyčtené z grafu $v = 3\,\text{m/s}$ $t = 0,5\,\text{s}$ $v_0 = 0\,\text{m/s}$ $a = ?$ $s = ?$

Pomocí hodnot vyčtených z grafu můžeme určit zrychlení míče a přímým dosazením do rovnice pro dráhu vypočteme výšku, ze které byl míč upuštěn.

$$v = at \Rightarrow a = \frac{v}{t}$$

$$s=\frac{1}{2}at_d^2$$

$$a=\frac{v}{t}=\frac{3}{0,5}\,\mathrm{m/s^2}=6\,\mathrm{m/s^2}$$

$$s=\frac{1}{2}at_d^2=\frac{1}{2}6\cdot 0,5^2\,\mathrm{m}=0,75\,\mathrm{m}$$

Míč padal se zrychlením $6\,\mathrm{m/s^2}$ a byl upuštěn z výšky 0,75 m.

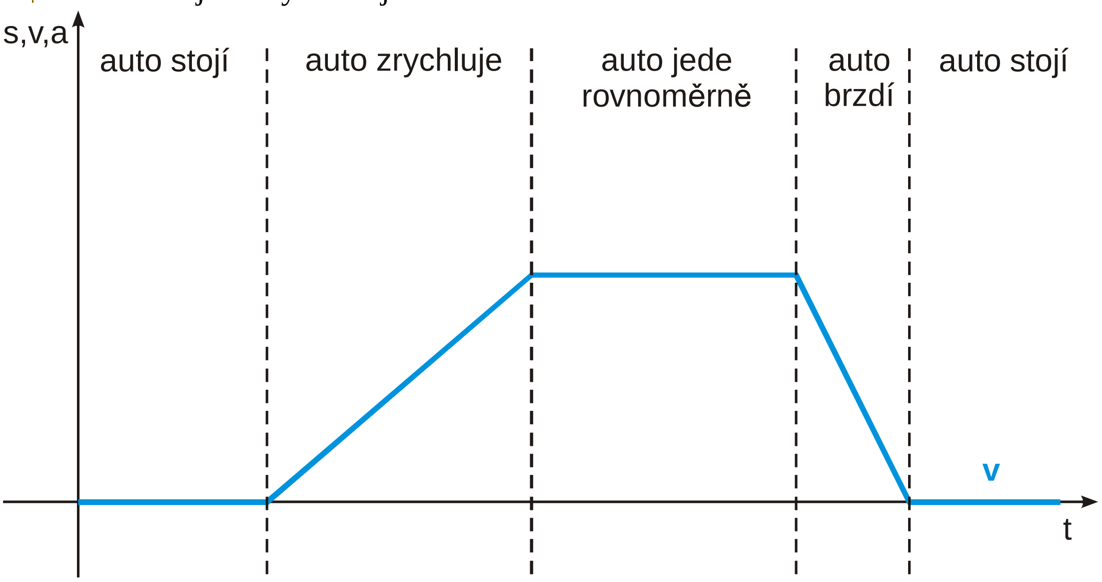
Poznámka: K určení zrychlení bychom mohli použít i jinou dvojici hodnot rychlosti a času získaných z grafu. Pro určení zrychlení by bylo možné použít i definiční vztah pro zrychlení

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{3}{0,5}\,\mathrm{m/s^2}=6\,\mathrm{m/s^2}$$

Př. 3: Načrtni do jednoho obrázku grafy všech tří pohybových veličin pro následující pohyb: Auto stojí, pak se rovnoměrně rozjíždí, určitou dobu jede rovnoměrně, pak rychle zastaví a stojí.

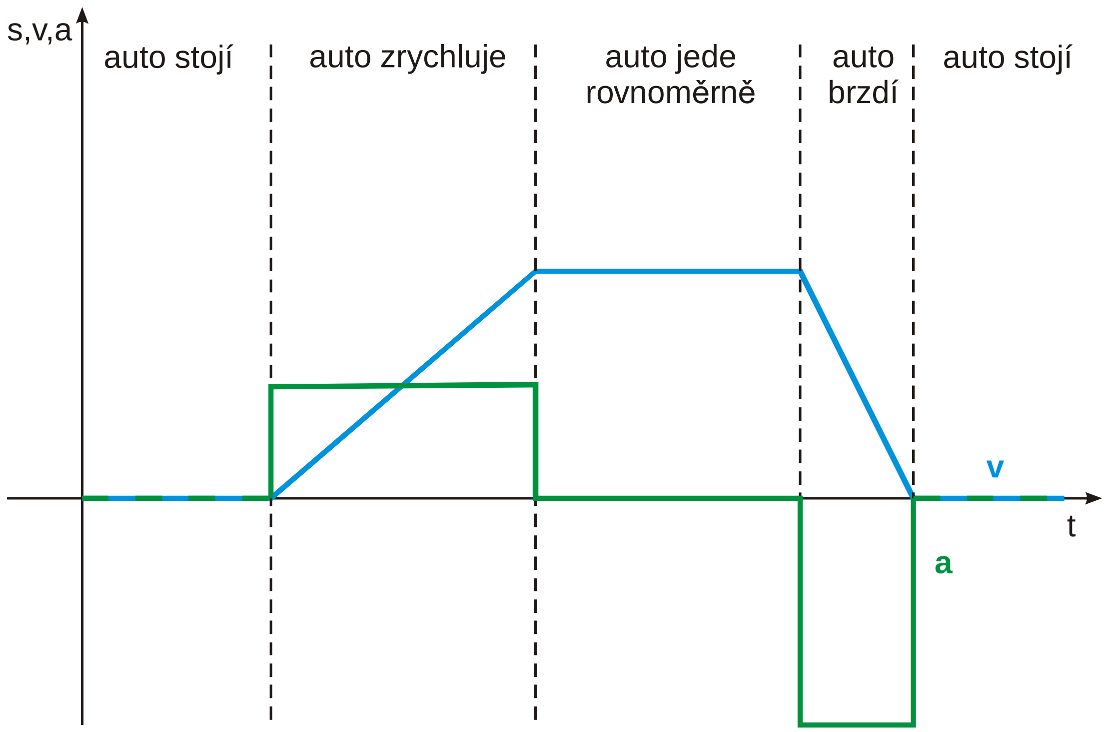
Nejdříve nakreslím graf rychlost, tato veličina souvisí přímo se zrychlením i dráhou.
Graf rychlosti se skládá z těchto částí:

- auto stojí $\Rightarrow$ rychlost je nulová $\Rightarrow$ vodorovná čára ležící na ose *x*,
- auto zrychluje $\Rightarrow$ rychlost rovnoměrně roste $\Rightarrow$ šikmá přímá čára,
- auto jede rovnoměrně $\Rightarrow$ rychlost je stále stejná $\Rightarrow$ vodorovná čára,
- auto zastavuje $\Rightarrow$ rychlost se rovnoměrně zmenšuje $\Rightarrow$ šikmá čára směřující k nule (více strmá než při urychlování),
- auto stojí $\Rightarrow$ rychlost je nulová $\Rightarrow$ vodorovná čára ležící na ose *x*.



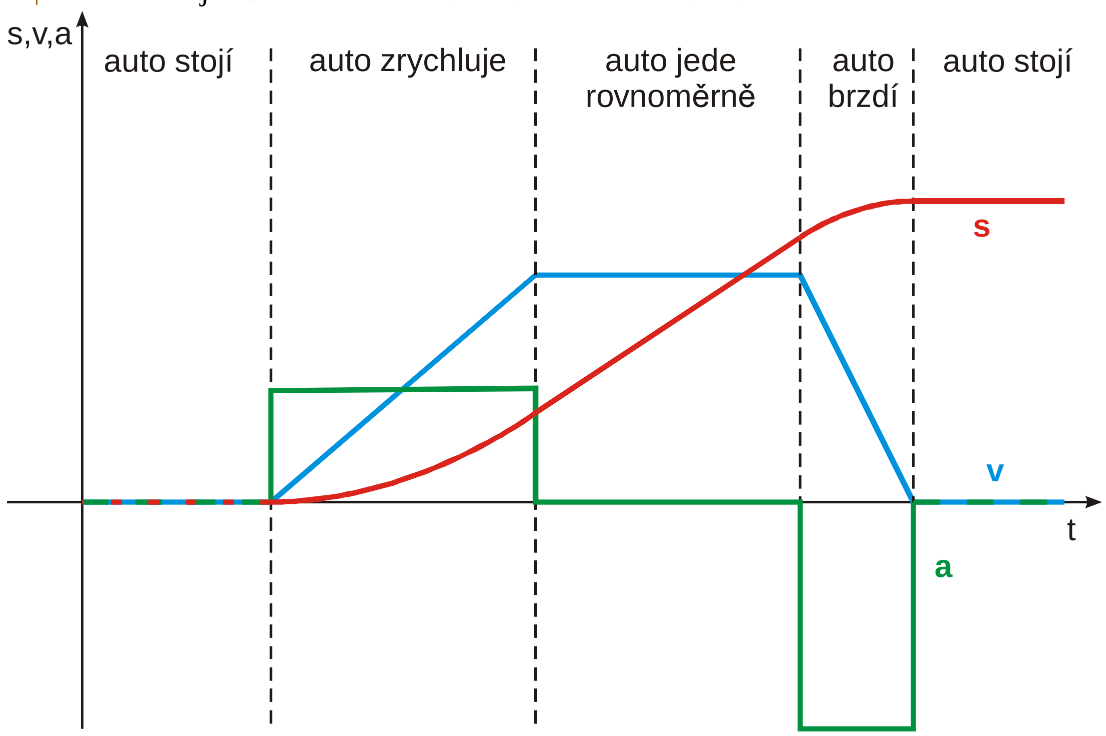
Graf zrychlení se skládá z těchto částí:

- auto stojí $\Rightarrow$ zrychlení je nulové $\Rightarrow$ vodorovná čára ležící na ose *x*,
- auto zrychluje $\Rightarrow$ zrychlení je stále stejné $\Rightarrow$ vodorovná čára,
- auto jede rovnoměrně $\Rightarrow$ zrychlení je nulové $\Rightarrow$ vodorovná čára na ose *x*,
- auto zastavuje $\Rightarrow$ zrychlení je stále stejné, záporné a jeho velikost větší než při rozjíždění $\Rightarrow$ vodorovná čára vzdálenější od osy *x* než při zrychlování,
- auto stojí $\Rightarrow$ rychlost je nulová $\Rightarrow$ vodorovná čára ležící na ose *x*.



Graf dráhy se skládá z těchto částí:

- auto stojí ⇒ dráha je nulová ⇒ vodorovná čára ležící na ose *x*,
- auto zrychluje ⇒ dráha přibývá stále rychleji ⇒ křivka s rostoucí strmostí,
- auto jede rovnoměrně ⇒ dráha přibývá stále stejně rychle ⇒ šikmá čára se stejnou strmostí jakou měla křivka z předchozí části pohybu na konci,
- auto zastavuje ⇒ dráha přibývá stále pomaleji ⇒ křivka s klesající strmostí, na konci vodorovná,
- auto stojí ⇒ dráha se nemění ⇒ vodorovná čára.



Pedagogická poznámka: Problematika předchozího příkladu se podrobněji rozebírá ještě v hodině 010123, takže není nic tragického pokud studenti nebudou zcela úspěšní. Je potřeba sledovat, aby všechny grafy spolu souhlasily.
Společně si kontrolujeme situaci po nakreslení každého ze tří grafů. Zejména u grafu dráhy je možné kontrolovat správnost i poměrně podrobně (třeba napojení jednotlivých částí).

Pedagogická poznámka: Následující příklad je rozšířenou variantou předchozího s nutností spočítat konkrétní hodnoty. Většinou ho přeskakujeme a počítají ho pouze ti nejlepší.

Př. 4: Automobil nejdříve zrychloval 5 s ze zrychlením $2\,\mathrm{m/s^2}$, pak jel 4 s rovnoměrně a pak zastavil se zpomalením $5\,\mathrm{m/s^2}$. Nakresli co nejpřesněji do jednoho obrázku s popsanými osami grafy všech tří veličin.

Až na úvodní část, kdy automobil z předchozího příkladu stál jde o stejný příklad $\Rightarrow$ grafy budou vypadat stejně, jenom máme popsat osy $\Rightarrow$ musíme spočítat veličiny pro jednotlivé části pohybu:

- **1. zrychlování:** $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $a_1 = 2\,\mathrm{m/s^2}$, $v_1 = a_1 t_1 = 2 \cdot 5\ \mathrm{m/s} = 10\,\mathrm{m/s}$,
  $s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 5^2\ \mathrm{m} = 25\,\mathrm{m}$,
- **2. rovnoměrný pohyb:** $t_2 = 4\,\mathrm{s}$, $a_2 = 0\,\mathrm{m/s^2}$, $v_2 = v_1 = 10\,\mathrm{m/s}$,
  $s_2 = v_2 t_2 = 4 \cdot 10\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{m}$,
- **3. zpomalování:** $a_3 = -5\,\mathrm{m/s^2}$, $v_3 = 0\,\mathrm{m/s}$, $v_{30} = 10\,\mathrm{m/s}$,
  $v_3 = v_{30} + a_3 t_3 \ \Rightarrow\ t_3 = \frac{v_3 - v_{30}}{a_3} = \frac{0-10}{-5}\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{s}$
  $s_3 = v_{30} t_3 + \frac{1}{2} a_3 t_3^2 = 10 \cdot 2 + \frac{1}{2}(-5) \cdot 2^2\ \mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}$.

$\Rightarrow$

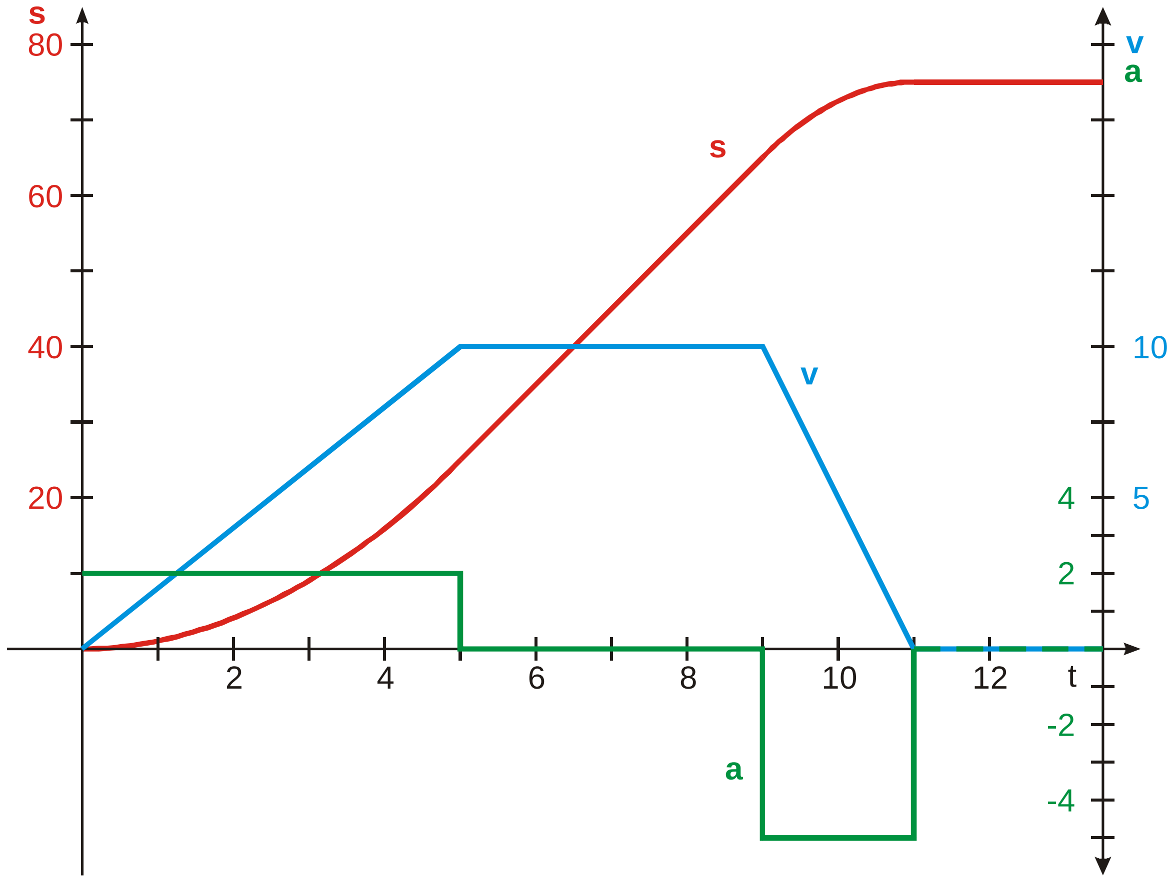
Celková dráha: $s = s_1 + s_2 + s_3 = 25 + 40 + 10\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{m}$.

Celkový čas: $t = t_1 + t_2 + t_3 = 5 + 4 + 2\,\mathrm{s} = 11\,\mathrm{s}$.

Nejvyšší rychlost: $v_{max} = v_1 = 10\,\mathrm{m/s}$.

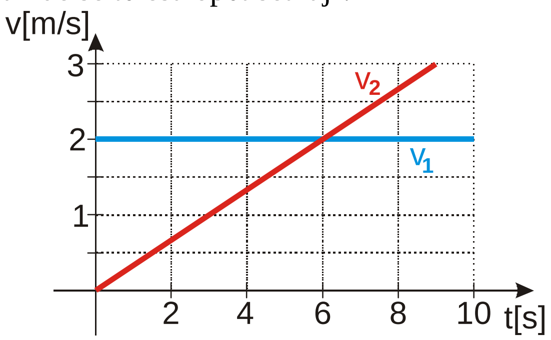
Největší velikost zrychlení: $a_{|max|} = a_3 = -5\,\mathrm{m/s^2}$.

Teď můžeme nakreslit graf.



Pedagogická poznámka: Pokud učíte normální žáky, bude následující výpočet velmi problematický (i když je jednoduchý). V takovém případě považuji za lepší ho vést na tabuli než ho zbytečně lámat v lavicích.

Př. 5: Dvě tělesa se pohybují ve stejném směru a jsou v čase $t = 0\,\text{s}$ ve stejném místě. Grafy jejich rychlostí jsou na obrázku. Urči druhy pohybu, kterými se pohybují. Kdy a kde se tělesa opět setkají?



První těleso se pohybuje rovnoměrným pohybem. Jeho rychlost se nemění a je stále $v_1 = 2\,\text{m/s}$. Druhé těleso se pohybuje rovnoměrně zrychleně s nulovou počáteční rychlostí, protože jeho rychlost rovnoměrně stoupá. Velikost zrychlení můžeme určit pomocí rychlosti $v_2 = 2\,\text{m/s}$ v 6 s. Až do šesté sekundy, kdy se rychlosti vyrovnají se pohybuje první těleso rychleji a druhému se vzdaluje. Od šesté sekundy se pohybuje rychleji druhé těleso a první postupně dohání. Ve chvíli setkání obě tělesa urazí od počátku stejnou dráhu.

Zrychlení druhého tělesa: $v_2 = a_2 t \Rightarrow a_2 = \frac{v_2}{t}$.

Čas setkání: $s_1 = s_2$.

$$v_1 t_s = \frac{1}{2} a_2 t_s^2$$

$$\frac{2v_1}{a_2} = t_s$$

Uražená dráha k místu setkání (jako dráha prvního tělesa): $s = v_1 t_s = v_1 \frac{2v_1}{a_2} = \frac{2v_1^2}{a_2}$.

Dosazení:

$$a_2 = \frac{v_2}{t} = \frac{2}{6}\,\mathrm{m/s^2} = \frac{1}{3}\,\mathrm{m/s^2}$$

$$t_s = \frac{2v_1}{a_2} = \frac{2 \cdot 2}{\frac{1}{3}} = 12\,\mathrm{s}$$

$$s = \frac{2v_1^2}{a_2} = \frac{2 \cdot 2^2}{\frac{1}{3}}\,\mathrm{m} = 24\,\mathrm{m}$$

Tělesa se potkají za 12 sekund ve vzdálenosti 24 m od počátku.

Poznámka: Je důležité si uvědomit, že obrázek informuje o rychlostech těles a ne jejich dráze. Společný průsečík tedy není místem setkání, ale bodem, který nás informuje, že v čase 6 s měla obě tělesa stejnou rychlost.
Čas setkání lze určit i pomocí grafu rychlostí. 6 sekund získávalo první těleso náskok. Rozdíly rychlostí obou těles v tomto intervalu jsou stejné jako rozdíly rychlostí těles po 6 sekundy, od které je druhé těleso rychlejší. Například v 3 sekundě je první těleso o 1 m/s rychlejší než druhé, čemuž odpovídá fakt, že v 9 sekundě je o 1 m/s rychlejší druhé. Doba, po kterou druhé těleso dohání první se tak musí rovnat době, kdy se první druhému vzdalovalo.

Shrnutí: Grafy pohybových veličin *a*, *v*, *s* přesně odpovídají tomu, jak se tyto veličiny při rovnoměrně zrychleném pohybu mění.